Cours de Statistiques

Focus sur le Chapitre 5: tests statistiques usuels

Licence 3 – Parcours Gestion et Finance

Stéphane ROBIN
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Département de Gestion – EM Sorbonne

Principe des tests statistiques

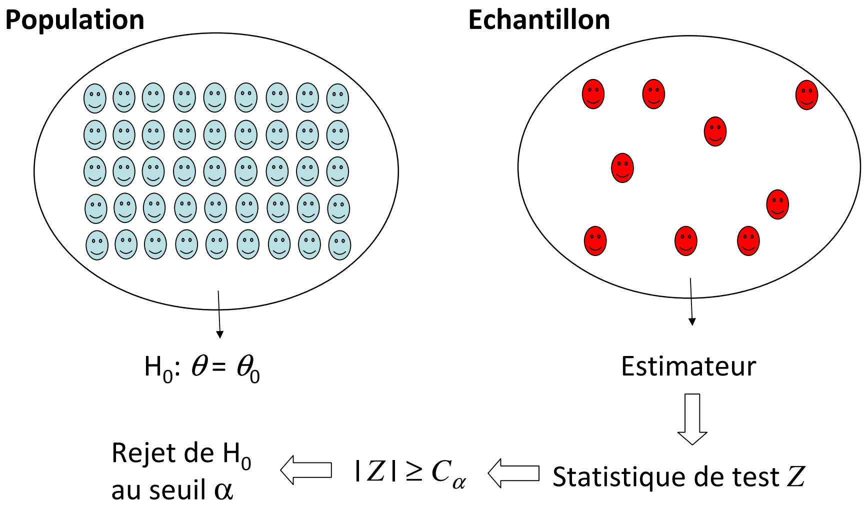
Le principe d'un test est le "symétrique" de celui de l'IC. On fait une hypothèse (dite "hypothèse nulle", H_0) sur la valeur d'un paramètre inconnu (espérance, par ex.) dans une population.

On calcule dans un échantillon la valeur d'un estimateur de ce paramètre (moyenne pour l'espérance, par exemple). On utilise cette valeur pour construire une "statistique de test".

Si la statistique de test est supérieure (en valeur absolue) à celle d'une "valeur critique" de référence, on rejette H_0 au seuil de risque correspondant à la valeur critique (5% ou 1%)

Sinon, on conserve H_0 ("acceptation" ou "non-rejet").

Principe des tests statistiques



L'hypothèse alternative

Si on rejette H_0: $\theta = \theta_0$, la conclusion sur la valeur du θ dépend de la manière dont on a spécifié l'**hypothèse alternative**, notée H_1

Si on pose H_0: $\theta = \theta_0$ vs H_1: $\theta \neq \theta_0$, on fait un **test bilatéral:** θ peut prendre des valeurs supérieures ou inférieures à p_0

Si on pose H_0: $\theta = \theta_0$ vs H_1: $\theta > \theta_0$, ou H_0: $\theta = \theta_0$ vs H_1: $\theta < \theta_0$, on fait un **test unilatéral:** θ ne peut prendre que des valeurs supérieures à θ_0 dans le premier cas (test unilatéral à droite) et inférieures à θ_0 dans le second cas (test unilatéral à gauche).

Règle de décision

La décision d'un test consiste à choisir entre H_0 et H_1 (décider que H_0 est vraie ou décider que H_1 est vraie). Il y a donc quatre possibilités:

	H_0 vraie dans le monde réel	**H_1 vraie dans le monde réel**
On choisit H_0	Pas d'erreur	Erreur de 2^{nde} espèce
On choisit H_1	Erreur de $1^{ère}$ espèce	Pas d'erreur

La probabilité de commettre l'erreur de $1^{ère}$ espèce est appelée "risque de $1^{ère}$ espèce" et celle de commettre l'erreur de 2^{nde} espèce est appelée "risque de 2^{nde} espèce".

Risques associés à la décision

Le risque de $1^{ère}$ espèce est donc la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie (c'est-à-dire de rejeter H_0 à tort). On le note α et on a α = Prob(rejeter H_0 | H_0 vraie).

Le risque de 2^{nde} espèce est donc la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse (c'est-à-dire d'accepter H_0 à tort). On le note β et on a β = Prob(accepter H_0 | H_0 fausse).

On peut résumer ces deux risques à l'aide d'un tableau :

	H_0 vraie dans le monde réel	**H_1 vraie dans le monde réel**
On choisit H_0	$1 - \alpha$	β
On choisit H_1	α	$1 - \beta$

Approche de Neyman et Pearson

Les risques α et β sont antagonistes: plus le risque de $1^{ère}$ espèce α est petit, plus le risque de 2^{nde} espèce β est petit (et inversement).

Depuis les travaux de Neyman et Pearson, on fixe α à un seuil conventionnel (appelé "seuil de risque" ou "seuil de significativité"), généralement 10%, 5% ou 1%.

Imposer un α faible revient à accepter plus souvent H_0 (y compris à tort) et à choisir H_1 plus rarement. Il faut donc bien choisir H_0 en fonction du risque auquel on accorde le plus d'importance.

<u>Exemple:</u> poser H_0: "le patient est malade" vs H_1: "il est bien portant" revient à vouloir minimiser le risque de ne pas traiter un patient malade alors que poser H_0: "le patient est bien portant" vs H_1: "il est malade" revient à vouloir minimiser le risque de traiter un patient bien portant.

Puissance d'un test

La **puissance d'un test** est définie comme $1 - \beta$, où β est le risque de 2^{nde} espèce. C'est donc la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse (rejeter H_0 à raison): $1 - \beta$ = Prob(rejet de H_0 | H_0 fausse).

Le risque de 2^{nde} espèce est inconnu, mais on peut tracer sa courbe (dite "courbe d'efficacité"). La puissance d'un test est donc également inconnue, mais on peut la lire sur des "courbes de puissance" ou abaques. Une puissance satisfaisante doit être $\geq 0{,}80$.

Si plusieurs tests sont possibles pour tester une même hypothèse à un seuil de significativité α donné, on privilégiera le test le plus puissant, c'est-à-dire celui présentant la puissance $1 - \beta$ la plus élevée (et donc le risque de 2^{nde} espèce β le plus faible).

Contenu du Chapitre 5

5.1. Tests d'hypothèse simples

Les tests d'hypothèses simples consiste à poser une hypothèse H_0 sur la valeur d'un seul paramètre inconnu et à tester cette hypothèse.

On postule par exemple H_0 : $\theta = \theta_0$ où θ_0 est une valeur numérique et on accepte ou on rejette cette hypothèse. Il s'agit donc d'un test par rapport à une valeur de référence θ_0

Dans cette première section du chapitre 5, on examine trois types de tests d'hypothèses simples très courants: (1) le test d'une proportion, (2) les tests de l'espérance d'une loi normale et (3) les tests de la variance d'une loi normale.

5.1.1. test d'une proportion: statistique de test

Soit p une proportion inconnue dans une population.
On veut tester H_0: $p = p_0$ contre H_1: $p \neq p_0$ où p_0 est une valeur numérique . Il s'agit d'un test bilatéral.

Soit $\hat{p}$("p chapeau") l'estimateur de p dans un échantillon de taille n.
On sait (cf. Chapitre 3) que la distribution d'échantillonnage est:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

On utilise alors comme statistique de test la VA :

$Z = \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ qui, si H_0 est vraie, s'écrit $\boxed{Z = \dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}}$

Test de proportion: valeur critique et décision

Étant donné la distribution de "p chapeau", on peut dire que, sous H_0 (c'est-à-dire en supposant H_0 vraie), on a :

$$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim \boldsymbol{N}(0,1)$$

Au seuil de significativité α, on détermine la valeur critique C_α comme $C_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi $\boldsymbol{N}(0,1)$.
Pour $\alpha = 0{,}05$ on trouve $C_\alpha = 1{,}96$ et pour $\alpha = 0{,}01$ on trouve $C_\alpha = 2{,}58$.

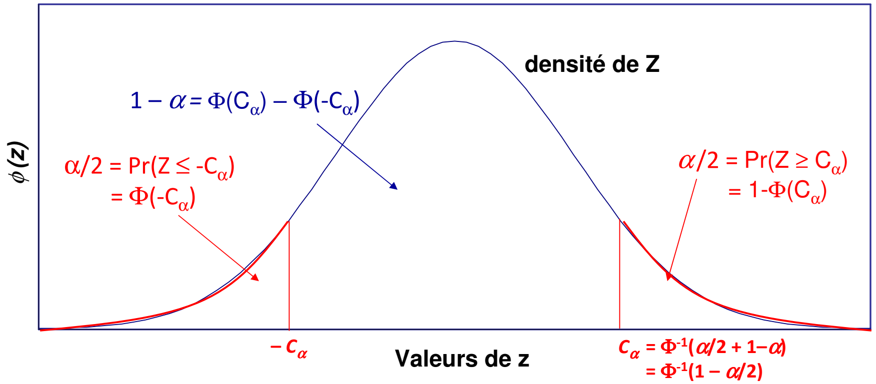
<u>Règle de décision:</u>
Si $|Z| \geq C_\alpha$, on rejette H_0 au seuil α (et on choisit donc H_1).
Si $|Z| < C_\alpha$, on accepte H_0 avec le risque de 2nde espèce inconnu β.

Détermination de C_α: interprétation graphique

α = risque de 1ère espèce fixé à un seuil de significativité

La zone de rejet de H_0, $W =]-\infty; -C_\alpha] \cup [C_\alpha; +\infty[$, correspond au risque α

La zone d'acceptation de H_0, $\overline{W} =]-C_\alpha; C_\alpha[$, correspond à la probabilité $1 - \alpha$



Tests unilatéraux (1)

Pour tester "H_0: $p = p_0$" contre "H_1: $p > p_0$" (test unilatéral à droite), on utilise la même statistique sous H_0 :

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim \boldsymbol{N}(0,1)$$

Au seuil de significativité α, la valeur critique C_α devient maintenant $C_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi $\boldsymbol{N}(0,1)$.
Pour $\alpha = 0{,}05$ on trouve $C_\alpha = 1{,}64$ et pour $\alpha = 0{,}01$ on trouve $C_\alpha = 2{,}32$.

<u>Règle de décision:</u>

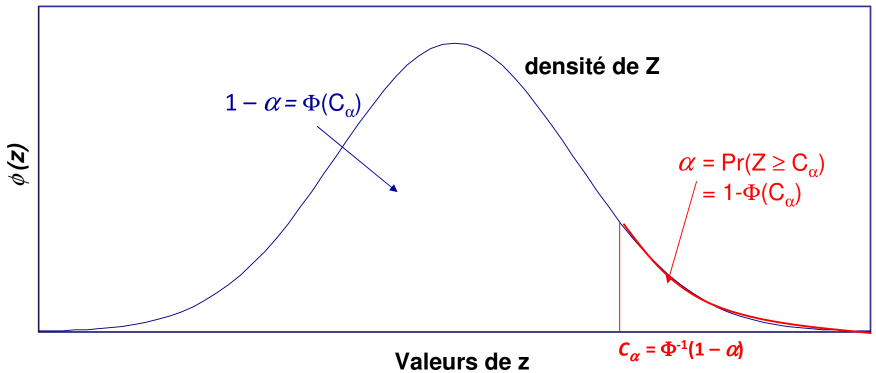
Si $Z \geq C_\alpha$, on rejette H_0 au seuil α (et on choisit donc H_1).
Si $Z < C_\alpha$, on accepte H_0 avec le risque de 2nde espèce inconnu β.

Détermination de C_α: interprétation graphique

α = risque de 1ère espèce fixé à un seuil de significativité

La zone de rejet de H_0, $W = [C_\alpha; +\infty[$, correspond au risque α

La zone d'acceptation de H_0, $W =]-\infty; C_\alpha[$, correspond à la probabilité $1 - \alpha$



Tests unilatéraux (2)

Pour tester "H_0: $p = p_0$" contre "H_1: $p < p_0$" (test unilatéral à gauche), on utilise encore la même statistique sous H_0 :

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim \boldsymbol{N}(0,1)$$

Au seuil de significativité α, on a toujours $C_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, où Φ est la fonction de répartition de la loi $\boldsymbol{N}(0,1)$, mais on compare Z à $-C_\alpha$

<u>Règle de décision:</u>

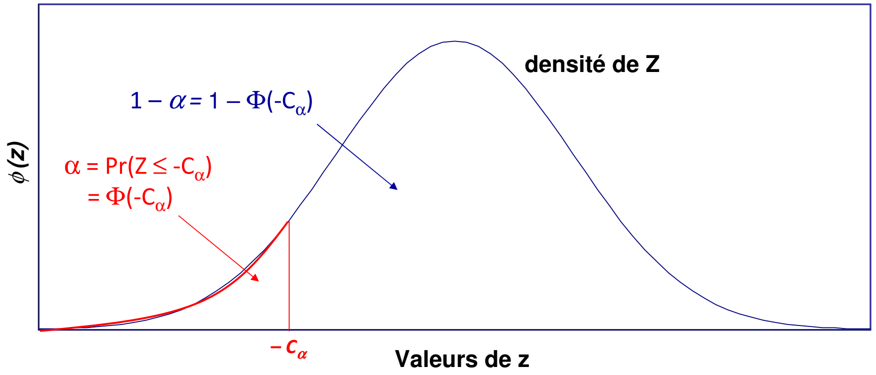
Si $Z \leq -C_\alpha$, on rejette H_0 au seuil α (et on choisit donc H_1).
Si $Z > -C_\alpha$, on accepte H_0 avec le risque de 2nde espèce inconnu β.

Détermination de C_α: interprétation graphique

α = risque de 1ère espèce fixé à un seuil de significativité

La zone de rejet de H_0, W = $]-\infty; -C_\alpha]$, correspond au risque α

La zone d'acceptation de H_0, W = $]C_\alpha; +\infty[$, correspond à la probabilité $1-\alpha$



Probabilité critique ou p-valeur

Plutôt qu'utiliser la valeur critique C_α on peut utiliser la probabilité critique (ou "p-valeur") pour faire le test.

Il s'agit simplement d'une façon alternative de réaliser le test : plutôt que comparer une statistique de test Z à un seuil critique C_α, on comparera directement la p-valeur au seuil α choisi.

- **Définition:**

" La p-valeur est la probabilité de calculer une statistique de test au moins aussi contraire à l'hypothèse H_0 que celle calculée dans l'échantillon considéré, en supposant H_0 vraie.
La p-valeur est donc la probabilité de tirer au sort, sous H_0, une estimation aussi éloignée du paramètre à tester que celle effectivement observée dans l'échantillon considéré."

Formules de la p-valeur

Soit $\hat{p}'$ une autre estimation de p. La **formule de la p-valeur** est:

- pour un test bilatéral:

$$\Pr\left(\left|\frac{\hat{p}'-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right| \geq \left|\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right) = 2\left[1-\Phi\left(\left|\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right)\right]$$

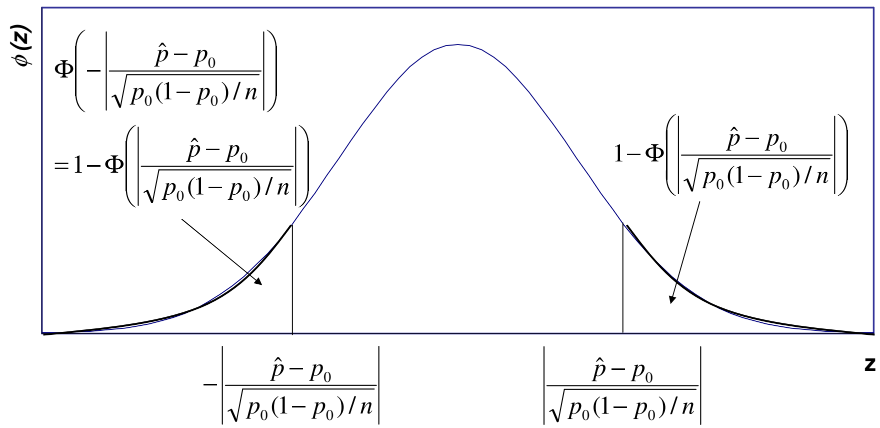
- pour un test unilatéral à droite:

$$\Pr\left(\frac{\hat{p}'-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \geq \left|\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right) = 1-\Phi\left(\left|\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right)$$

- pour un test unilatéral à gauche:

$$\Pr\left(\frac{\hat{p}'-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \leq -\left|\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right) = 1-\Phi\left(\left|\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right)$$

Représentation graphique de la *p*-valeur



Utilisation de la p-valeur

La probabilité critique est d'une utilisation très simple, et identique pour un test bilatéral et unilatéral.

Il suffit de calculer la **p-valeur**. Si elle est **inférieure au risque de première espèce α, on rejette H_0 au seuil α**. Sinon, on conserve H_0.

Ainsi, les seuils conventionnels étant 1%, 5% et 10%:

- si p-valeur < 0,01, on rejette H_0 au seuil de 1%
- si p-valeur < 0,05, on rejette H_0 au seuil de 5%
- si p-valeur < 0,10, on rejette H_0 au seuil de 10%

L'intérêt de la p-valeur est de pouvoir, avec un unique calcul, faire un même test à différents seuil de significativité.

Exemple

Un fournisseur produit un certain type de pièces pour l'industrie automobile. On s'intéresse à la proportion *p* de pièces ne présentant aucun défaut. Dans un échantillon de taille *n* = 100, on observe 85 pièces sans défaut. Peut-on accepter, au seuil de 5%, l'hypothèse nulle H_0: $p = 0,90$ contre H_1: $p \neq 0,90$?

On calcule la statistique de test :

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0,85 - 0,90}{\sqrt{0,10 \times 0,90/100}} = -1,67$$

La valeur critique pour α = 5% est $C_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$
Comme $|Z|$=1,67 < 1,96, on accepte H_0 avec un risque de 2nde espèce β.

<u>Rque :</u> la *p*-valeur est $2[1-\Phi(1,67)] = 0,095$ ce qui conduit à la même conclusion (on ne peut pas rejeter H_0 au seuil de 5%).

5.1.2. tests de l'espérance d'une loi $\boldsymbol{N}(\mu,\sigma)$

Soit X une VA continue distribuée selon une loi normale $\boldsymbol{N}(\mu, \sigma)$.

On veut tester l'hypothèse H_0:"$\mu = \mu_0$" contre H_1:"$\mu \neq \mu_0$" (test bilatéral) ou H_1:"$\mu > \mu_0$" ou H_1:"$\mu < \mu_0$" (tests unilatéraux).

Il faut considérer deux cas:
- Cas 1: la variance σ^2 est connue (cas rare)
- Cas 2: la variance σ^2 est inconnue (cas le plus répandu)

Dans les deux cas, l'estimateur de μ est la moyenne "X barre" et la statistique de test est construite à partir de "X barre"

Cas 1: variance connue

La statistique de test quand la variance σ^2 est connue s'écrit, sous H_0 :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

où n est la taille de l'échantillon. Sous H_0, cette statistique suit une loi normale centrée réduite $\boldsymbol{N}(0, 1)$.

La valeur critique associée à risque α donné est déterminée comme dans le cas d'une proportion (cf. 5.3.1.): $C_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ pour un test bilatéral, et $C_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ pour un test unilatéral.

La décision se prend comme pour une proportion: pour un test bilatéral, on rejette H_0 au seuil α si $|Z| \geq C_\alpha$, et on l'accepte sinon. Pour un test unilatéral à droite (à gauche), on rejette H_0 au seuil α si $Z \geq C_\alpha$ ($Z \leq -C_\alpha$) et on l'accepte sinon.

Cas 1: formule de la p-valeur

Soit $\bar{X}'$ une autre estimation de μ donnée par l'estimateur $\bar{X}$. La formule de la p-valeur est

- Pour un test bilatéral :

$$\Pr\left(\left|\frac{\bar{X}'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right) = 2\left[1-\Phi\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right)\right]$$

- Pour un test unilatéral à droite (H_1: $\mu>\mu_0$) :

$$\Pr\left(\frac{\bar{X}'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right) = 1-\Phi\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right)$$

- Pour un test unilatéral à gauche (H_1: $\mu<\mu_0$):

$$\Pr\left(\frac{\bar{X}'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right) = 1-\Phi\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right)$$

Cas 2: variance inconnue

Sous H_0, la statistique de test quand la variance σ^2 est inconnue s'écrit:

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

où n est la taille de l'échantillon, et S l'écart-type empirique (cf. formule dans le Chapitre 2).

Sous H_0, cette statistique suit une loi de Student à n-1 d.l. On lit dans la table de la loi de Student ***St***(n-1) la valeur critique C_α associée à un seuil de risque α donné :

- $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha/2)$ pour un test bilatéral
- $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$ pour un test unilatéral (la loi de Student étant symétrique, C_α donne immédiatement, si besoin, $-C_\alpha$)

Cas 2: conclusion du test

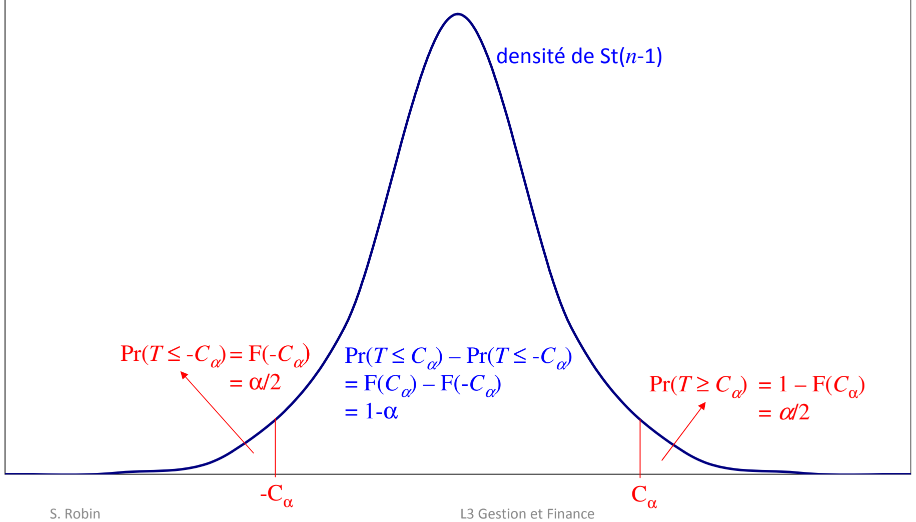
Le principe est le même que pour les tests précédents.

Pour un test bilatéral:
Si $|T|\geq C_\alpha$, on est dans l'intervalle de rejet de H_0. Le test est significatif, on rejette H_0: $p = p_0$ et on accepte H_1: $p \neq p_0$ au seuil de risque α.
Si $|T|<C_\alpha$, on accepte H_0: $p = p_0$ avec un risque de seconde espèce β.

Pour un test unilatéral à droite (à gauche):
Si $T \geq C_\alpha$, ($T \leq -C_\alpha$) on est dans l'intervalle de rejet de H_0. Le test est significatif. On rejette H_0: $p = p_0$ et on accepte H_1: $p > p_0$ (H_1: $p < p_0$) au seuil de risque α.
Si $T < C_\alpha$, ($T > -C_\alpha$), on est dans l'intervalle d'acceptation de H_0. On conserve H_0: $p = p_0$ avec un risque de deuxième espèce β.

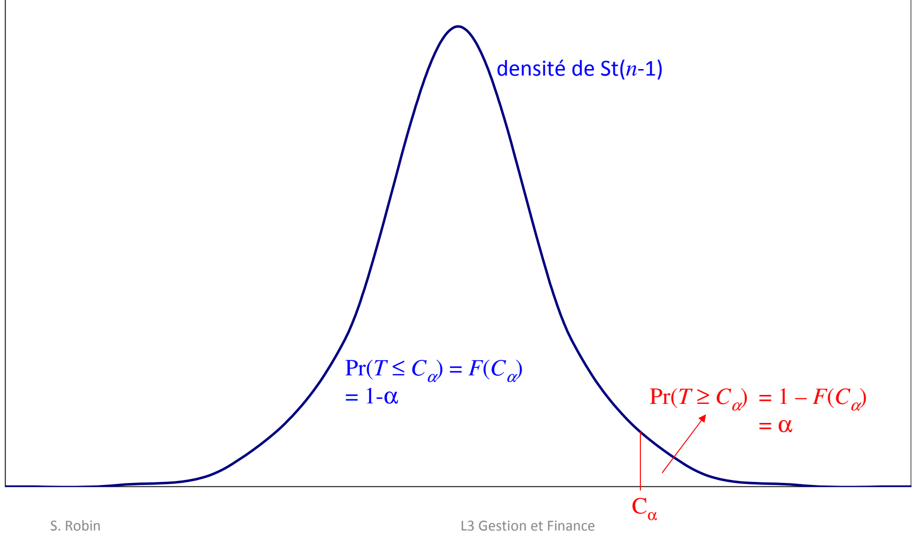
Cas 2, graphique : test bilatéral

La zone de rejet de H_0, W = $]-\infty; -C_\alpha]\cup[C_\alpha; +\infty[$, correspond au risque α
La zone d'acceptation de H_0, W = $]-C_\alpha; C_\alpha[$, correspond à la probabilité $1-\alpha$



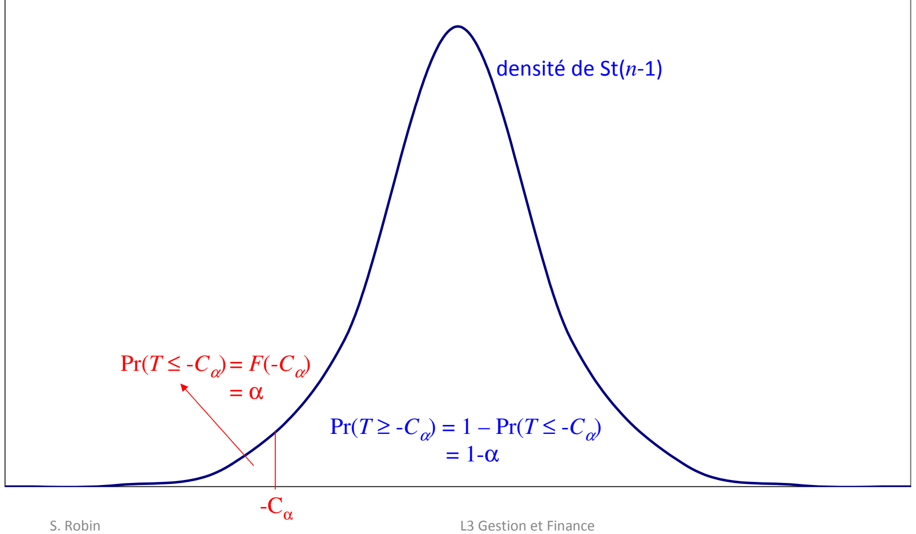
Cas 2, graphique : test unilatéral à droite

La zone de rejet de H_0, W = [C_α; +∞[, correspond au risque α
La zone d'acceptation de H_0, W =]−∞; C_α[, correspond à la probabilité 1 – α



Cas 2, graphique: test unilatéral à gauche

La zone de rejet de H_0, W =]-∞; −C_α], correspond au risque α
La zone d'acceptation de H_0, W =]C_α; +∞[, correspond à la probabilité 1 – α



Cas 2, exemple 1.a: test bilatéral

Un producteur de jus de fruits affirme qu'un de ses nouveaux produits à base d'acérola (une variété de cerise) contient de la vitamine C. On appelle X la quantité de vitamine C (en g/l) contenue dans 1 l de jus, avec X ~ N(μ, σ) de paramètres inconnus.

Un autorité sanitaire indépendante veut vérifier cette affirmation. Pour cela, il faut tester H_0:"$\mu = 0$" contre H_1:"$\mu \neq 0$".

L'estimateur de μ est la moyenne "X barre". Dans un échantillon de 100 litres de jus de fruits, on trouve une moyenne de 0.6 g/l avec un écart-type empirique de 0.3 g/l.

Application numérique

Dans l'exemple, on calcule:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.6 - 0}{0.3/\sqrt{100}} = 20$$

La valeur C_α pour une loi de Student à 99 d.l. est 1.98 si α = 5% et 2.63 si α = 1%.

On constate que |T| =20 > 2.63 >1.98. On rejette donc H_0: μ = 0 et on accepte H_1: $\mu \neq 0$ tant au seuil de 1% qu'au seuil de 5%.

L'autorité sanitaire peut donc conclure à une présence significative (au seuil de 1%) de vitamine C dans le nouveau jus de fruits et autoriser le fabricant à afficher cette information sur son produit.

Cas 2, exemple 1.b: test unilatéral à gauche

Le fabricant de jus de fruits veut maintenant afficher sur son produit une contenance minimale de 0.5 g/l de vitamine C. L'autorité sanitaire teste cette fois H_0:"$\mu = 0.5$" contre H_1:"$\mu < 0.5$" (hypothèse alternative: la quantité minimale annoncée n'est pas atteinte).

On calcule: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{0.6 - 0.5}{0.3/\sqrt{100}} \approx 3.33$

La valeur $-C_\alpha$ pour une loi de Student à 99 d.l. est -1.66 si $\alpha = 5\%$ et -2.36 si $\alpha = 1\%$. On constate que T = 3.33 > -1.66 > -2.36 (c'est-à-dire que, pour les deux valeurs de α, on a $T > -C_\alpha$).

On ne peut pas rejeter H_0: $\mu = 0.5$ au seuil de 1%, ni au seuil de 5%. L'autorité conclut que la quantité minimale de vitamine C annoncée est bien présente dans le produit.

Cas 2, exemple 2: test unilatéral à gauche

Une fabricant de câbles veut vérifier si son dernier modèle de câble résiste à une charge moyenne de 500 kg. Dans un échantillon de 81 câbles, il observe une charge de rupture moyenne de 491 kg avec un écart-type de 36 kg. Soit X la charge de rupture d'un câble, X~N(μ, σ) de paramètres inconnus. On teste H_0:"$\mu = 500$" contre H_1:"$\mu < 500$".

On calcule: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{491 - 500}{36/\sqrt{81}} = \dfrac{-9}{4} = -2.25$

La valeur $-C_\alpha$ pour une loi de Student à 99 d.l. est -1.66 si $\alpha = 5\%$ et -2.36 si $\alpha = 1\%$. On constate que -1.66 > T > -2.36.

On ne peut pas rejeter H_0: $\mu = 500$ au seuil de 1%, mais on peut la rejeter au seuil de 5%.

5.1.3. tests de la variance d'une loi $\boldsymbol{N}(\mu,\sigma)$

Soit X une VA continue distribuée selon une loi normale $\boldsymbol{N}(\mu, \sigma)$.

On veut tester l'hypothèse H_0:"$\sigma^2 = \sigma_0^2$" contre H_1:"$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$" (test bilatéral) ou H_1:"$\sigma^2 > \sigma_0^2$" ou H_1:"$\sigma^2 < \sigma_0^2$" (tests unilatéraux).

Il faut considérer deux cas:
- Cas 1: l'espérance μ est connue (cas rare)
- Cas 2: l'espérance μ est inconnue (cas le plus répandu)

Dans les deux cas, on utilisera l'estimateur du MV de σ^2, en faisant intervenir μ si l'espérance est connue et "X barre" si l'espérance est inconnue (dans ce dernier cas, on peut également utiliser la variance empirique).

Cas 1: test de la variance, espérance connue

Quand l'espérance μ est connue, la statistique de test est, sous H_0:

$$K = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$$

où n est la taille de l'échantillon, et où $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

Sous H_0, K suit une loi du Khi-deux à n d.l., $\chi^2(n)$. Pour un seuil de risque α donné, la décision du test se fait comme indiqué ci-dessous.

- Test bilatéral (H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$): on rejette H_0 si $K \geq C^1_\alpha$ ou si $K \leq C^2_\alpha$, où $C^1_\alpha = F^{-1}(1-\alpha/2)$ et $C^2_\alpha = F^{-1}(\alpha/2)$, à lire dans la table du $\chi^2(n)$.
- Test unilatéral ($\sigma^2 > \sigma_0^2$): on rejette H_0 si $K \geq C^1_\alpha$, où $C^1_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$
- Test unilatéral ($\sigma < \sigma_0^2$): on rejette H_0 si $K \leq C^2_\alpha$, où $C^2_\alpha = F^{-1}(\alpha)$

Cas 2: test de la variance, espérance inconnue

Quand l'espérance μ est inconnue, la statistique de test pour un échantillon de taille n est, sous H_0:

$$K = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad \text{avec } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

$$\text{et } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

Sous H_0, K suit une loi du Khi-deux à n-1 d.l., $\chi^2(n-1)$. Pour un seuil de risque α donné, la décision du test se fait comme indiqué ci-dessous.

- Test bilatéral (H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$): on rejette H_0 si $K \geq C^1{}_\alpha$ ou si $K \leq C^2{}_\alpha$, où $C^1{}_\alpha = F^{-1}(1-\alpha/2)$ et $C^2{}_\alpha = F^{-1}(\alpha/2)$, à lire dans la table du $\chi^2(n-1)$.
- Test unilatéral ($\sigma^2 > \sigma_0^2$): on rejette H_0 si $K \geq C^1{}_\alpha$, où $C^1{}_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$
- Test unilatéral ($\sigma < \sigma_0^2$): on rejette H_0 si $K \leq C^2{}_\alpha$, où $C^2{}_\alpha = F^{-1}(\alpha)$

5.2. Tests de comparaisons de populations

On veut ici comparer la valeur d'un paramètre entre deux populations **indépendantes**. On pose une hypothèse H_0 du type "$\theta_1 = \theta_2$" où θ_1 et θ_2 sont les valeurs (inconnues) du paramètre θ dans la population 1 et la population 2 respectivement.

On peut tester cette hypothèse contre H_1 "$\theta_1 \neq \theta_2$" (test bilatéral), H_1 "$\theta_1 > \theta_2$" (test unilatéral à droite) ou H_1 "$\theta_1 < \theta_2$" (test unilatéral à gauche).

Les paramètres qu'il est courant de comparer d'une population à l'autre sont : (1) une proportion, (2) l'espérance d'une loi normale ou quelconque et (3) la variance d'une loi normale.

5.2.1. test de comparaison des proportions

On considère, dans deux populations indépendantes, un caractère de Bernoulli (de valeurs 0 pour "échec", ou 1 pour "succès"). On s'intéresse à la proportion d'individus présentant la modalité 1 ("succès").

Cette proportion peut prendre la valeur p_1 dans la population 1 et la valeur p_2 dans la population 2. On veut tester H_0: $p_1 = p_2$ contre une hypothèse alternative H_1 ($p_1 \neq p_2$, ou $p_1 < p_2$, ou $p_1 > p_2$).

Pour faire ce test, on tire un EAS de chaque population, de telle sorte que les deux EAS soient indépendants. La statistique de test est quelque peu complexe, car elle repose sur l'approximation normale d'une loi hypergéométrique (non abordée au Chapitre 2) et nécessite de poser quelques notations préliminaires.

Notations

On introduit les notations suivantes. Soient:

- n_{p1} le nombre de "succès" (de 1) dans l'échantillon 1.
- n_p le nombre total de "succès" (de 1) dans les deux échantillons.
- $n_{(1-p)}$ le nombre total d'"échecs" (de 0) dans les deux échantillons.
- n_1 le nombre d'individus dans l'échantillon 1.
- n_2 le nombre d'individus dans l'échantillon 2.
- n l'effectif total des deux échantillons.

Statistique et décision du test

On admettra que, sous H_0, la statistique de test est:

$$Z = \frac{n_{p1} - \dfrac{n_p \times n_1}{n}}{\sqrt{\dfrac{n_1 \times n_2 \times n_p \times n_{(1-p)}}{n^2(n-1)}}} \approx N(0,1)$$

La décision se prend comme dans un test de proportion simple. Pour un test bilatéral, on rejette H_0 au seuil α si $|Z| \geq C_\alpha$, et on l'accepte sinon.

Pour un test est unilatéral à droite (à gauche), on rejette H_0 au seuil α si $Z \geq C_\alpha$ ($Z \leq -C_\alpha$) et on l'accepte sinon.

5.2.2. tests de comparaison des espérances

Soient X_1 et X_2 deux VA d'espérances respectives μ_1 et μ_2, et de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2, dans deux populations indépendantes (dont on tire deux échantillons aléatoires simples indépendants).

On teste H_0: "$\mu_1 = \mu_2$" contre H_1: "$\mu_1 \neq \mu_2$" (test bilatéral) ou H_1: "$\mu_1 > \mu_2$" (test unilatéral à droite) ou H_1: "$\mu_1 < \mu_2$" (test unilatéral à gauche).

Pour réaliser ce test, il faut considérer quatre cas possibles:

1. $X_1 \sim \boldsymbol{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \boldsymbol{N}(\mu_2, \sigma_2)$, avec σ_1 et σ_2 connus.
2. $X_1 \sim \boldsymbol{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \boldsymbol{N}(\mu_2, \sigma_2)$, avec σ_1 et σ_2 inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$.
3. $X_1 \sim \boldsymbol{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \boldsymbol{N}(\mu_2, \sigma_2)$, avec σ_1 et σ_2 inconnus.
4. X_1 et X_2 sont de lois quelconques, avec σ_1 et σ_2 inconnus.

Cas 1: variances connues

Soient X_1 et X_2 deux VA de lois $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. On suppose les écart-type σ_1 et σ_2 connus.

Sous H_0: "$\mu_1 = \mu_2$", la statistique de test est :

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

avec n_1 (n_2) taille de l'échantillon 1 (échantillon 2) et "X_1 barre" ("X_2 barre") moyenne empirique dans l'échantillon 1 (échantillon 2).

Sous H_0, $Z \sim \boldsymbol{N}(0,1)$. A partir de là, le test (bilatéral ou unilatéral) se résout exactement comme un test d'espérance simple quand la variance est connue (cf. Section 5.1.2., Cas 1, dans ce chapitre)

Cas 2: variances inconnues égales

Soient X_1 et X_2 deux VA de lois $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. On suppose les écart-type σ_1 et σ_2 inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$.

Sous H_0: "$\mu_1 = \mu_2$", la statistique de test est :

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \quad \text{avec } S_p = \sqrt{\frac{n_1\hat{\sigma}_1^2 + n_2\hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\left(x_{ik} - \overline{X}_i\right)^2 \ \text{ et } S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{k=1}^{n_i}\left(x_{ik} - \overline{X}_i\right)^2 \quad i = 1,2$$

Sous H_0, $T \sim \boldsymbol{St}(n_1 + n_2 - 2)$. A partir de là, le test (bilatéral ou unilatéral) se résout exactement comme un test d'espérance simple quand la variance est inconnue (cf. Section 5.1.2., Cas 2, dans ce chapitre)

Cas 2: exemple

Le producteur de jus de fruits du 5.1.2. dispose maintenant de deux échantillons: l'échantillon précédent de 100 litres de jus de fruits à base d'acérola (avec une quantité moyenne de vitamine C de 0.6 g/l et un écart-type empirique de 0.3 g/l), et un échantillon de 150 litres de jus d'orange enrichi en vitamine C. Dans ce dernier, la quantité moyenne de vitamine C est de 0.8 g/l avec un écart-type de 0.35 g/l.

Ces deux échantillons sont tirés de 2 populations indépendantes: la production de jus à base d'acérola pour le premier, et la production de jus d'orange enrichi en vitamine C pour le second.

La producteur souhaite comparer la quantité moyenne de vitamine C contenue dans chaque population. Il doit se livrer à un test de comparaison des moyennes bilatéral avec H_0: "$\mu_1 = \mu_2$".

Exemple: résolution du test

La moyenne est 0.6 (écart-type = 0.3) dans l'échantillon 1 (n_1 = 100), et 0.8 (écart-type = 0.35) dans l'échantillon 2 (n_2 = 150). Les écart-type empiriques étant très proches, on fait ici l'hypothèse de travail que les écart-types théoriques (inconnus) sont égaux ($\sigma_1 = \sigma_2$).

On calcule alors S_p = 0.33 et T = -4.68

Le quantile C_α de la loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ = 248 d.l. est égal à 1.96 pour α = 5% et à 2.58 pour un seuil α = 1%.

Comme $|T|$ = 4.66 > 2.58 > 1.96, on rejette l'hypothèse H_0: "$\mu_1 = \mu_2$" aux seuils de 5% et de 1%. On accepte H_1: "$\mu_1 \neq \mu_2$"

Conclusion: à ces seuils, la quantité moyennes de vitamine C contenue dans le jus à base d'acérola est différente de celle contenue dans le jus d'orange enrichi en vitamine C.

Cas 2, autre exemple: test unilatéral

Si on veut tester H_0: "$\mu_1 = \mu_2$" contre H_1:"$\mu_1 < \mu_2$" avec les données précédentes, il suffit de déterminer la valeur critique -C_α pour un test unilatéral à gauche.

Pour une loi St(248), cette valeur est de -1.64 au seuil de 5% et -2.33 au seuil de 1%.

La valeur de la statistique reste identique T = -4.66.
Comme -4.66 < -2.34 < -1.65, on rejette H_0: "$\mu_1 = \mu_2$" aux seuils de 5% et 1%, et on accepte H_1: "$\mu_1 < \mu_2$" (avec un risque de 2$^{\text{nde}}$ espèce inconnu).

On conclue que la quantité moyenne de vitamine C dans le jus à base d'acérola est significativement inférieure à celle contenue dans le jus d'orange enrichi en vitamine C.

Cas 3: lois normales, variances inconnues

Soient X_1 et X_2 deux VA de lois $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. On suppose les écart-type σ_1 et σ_2 inconnus avec $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Sous H_0: "$\mu_1 = \mu_2$", la statistique de test est :

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1 - 1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2 - 1}}}$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}\left(x_{ik} - \overline{X}_i\right)^2 \text{ et } S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{k=1}^{n_i}\left(x_{ik} - \overline{X}_i\right)^2 \quad i = 1, 2$$

Sous H_0, $T \sim \boldsymbol{St}(\nu)$. Il faut déterminer ν pour poursuivre le test.

Détermination de ν et résolution du test

Dans ce troisième cas, le nombre de degrés de libertés de la loi de Student, noté ν, est donné par la formule:

$$\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1-1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2-1}\right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_1^4}{(n_1-1)n_1^2}+\frac{\hat{\sigma}_2^4}{(n_2-1)n_2^2}}=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(n_1-1)S_1^4}{n_1^4}+\frac{(n_2-1)S_2^4}{n_2^4}}$$

arrondie à l'entier le plus proche.

A partir de là, le test (bilatéral ou unilatéral) se résout exactement comme un test d'espérance simple quand la variance est inconnue (cf. Section 5.1.2., Cas 2, dans ce chapitre)

Cas 4: lois quelconques, variances inconnues

Soient X_1 et X_2 deux VA de lois inconnues, d'espérances $E(X_1) = \mu_1$ et $E(X_2) = \mu_2$, et de variances $Var(X_1) = \sigma_1^2$ et $Var(X_2) = \sigma_2^2$.

Pour tester H_0: "$\mu_1 = \mu_2$" (contre une hypothèse alternative H1 unilatérale ou bilatérale), on prend deux EAS de tailles $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$.

Sous H_0, avec les mêmes notations des estimateurs de la variance que dans les cas précédents, la statistique de test est :

$$Z=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1-1}+\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2-1}}}\approx N(0,1)\quad \text{en approximation}$$

A partir de là, le test (bilatéral ou unilatéral) se résout exactement comme un test d'espérance simple quand la variance est connue (cf. Section 5.1.2., Cas 1, dans ce chapitre)

5.2.3. test de comparaison des variances

On ne considérera dans ce cours que le cas suivant: soient X_1 et X_2 deux VA de lois $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, de paramètres inconnus, dans deux populations indépendantes. On veut tester, à partir de deux EAS d'effectifs n_1 et n_2, H_0: "$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$" (contre une hypothèse alternative H_1).

Pour ce test, on conviendra d'adopter la procédure qui suit. En premier lieu, l'indice 1 sera réservé à l'échantillon ayant la plus grande variance empirique (notée S_1^2), et l'indice 2 à celui ayant la variance empirique la plus faible (notée S_2^2).

La statistique de test s'écrit alors comme le rapport : $\Im=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{n_1}{n_1-1}\hat{\sigma}_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}\hat{\sigma}_2^2}$
avec $S_1^2 > S_2^2$.

Statistique et résolution du test

Sous H_0, la statistique de test $\Im=\frac{S_1^2}{S_2^2}$ suit une loi $F(n_1\text{-}1, n_2\text{-}1)$.

La valeur critique C_α est lue dans la table de la loi de Fisher donnée pour le seuil α (en pratique, 5% ou 1% avec les tables fournies). Le nombre de d.l. du numérateur est n_1-1, celui du dénominateur est n_2-1.

Quelle que soit l'hypothèse alternative, on conviendra de rejeter H_0 au seuil α si $\Im \geq C_\alpha$ et de conserver H_0 si $\Im < C_\alpha$.

Les tables permettent de faire un test bilatéral au seuil de 10% ou 2% (avec $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha/2)$ soit $F^{-1}(0{,}95)$ si $\alpha = 0{,}10$ et $F^{-1}(0{,}99)$ si $\alpha = 0{,}02$), et un test unilatéral au seuil de 5% ou 1% (avec $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$ soit $F^{-1}(0{,}95)$ si $\alpha = 0{,}05$ et $F^{-1}(0{,}99)$ si $\alpha = 0{,}01$). Un test unilatéral des variances peut toujours se faire à droite, ce que facilite la procédure adoptée ici.

Exemple: test bilatéral

Avant de faire un test de moyenne, le producteur de jus de fruits du 5.2.2. , Cas 2, veut tester si les variances de ses deux populations sont égales, soit H_0: "$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$" contre H_1: "$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$" au seuil de 10%.

Dans l'échantillon 1 (150 litres de jus d'orange enrichi en vitamine C), la variance empirique est $S_1^2 = 0{,}35^2 = 0{,}1225$. Dans l'échantillon 2 (100 litres de jus de fruits à base d'acérola), on a $S_2^2 = 0{,}3^2 = 0{,}09$.
N.B. : On a inversé les numéros d'échantillons par rapport au 5.2.2. afin d'attribuer l'indice 1 à l'échantillon ayant la plus grande variance.

La statistique de test est $S_1^2/S_2^2 = 1{,}36$. La valeur critique est $F^{-1}(0.95) = 1{,}30$ avec (149, 99) degrés de libertés. Comme 1,36 > 1,30, on rejette H_0 au seuil de 10%.

Exemple: test unilatéral

Si le producteur veut tester H_0: "$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$" contre H_1: "$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$" au seuil de 5%, il conserve (avec les mêmes notations que précédemment) la même statistique de test, $S_1^2/S_2^2 = 1{,}36$.

La valeur critique est $F^{-1}(0.95) = 1{,}30$ avec (149, 99) degrés de libertés.

Comme 1,36 > 1,30, il rejette H_0 au seuil de 10%.

Pris ensembles, ces deux ensembles montrent qu'un test bilatéral au seuil de 10% et un test unilatéral au seuil de 5% se font non seulement avec la même statistique mais aussi avec la même valeur critique

N.B.: comme la statistique de test est positive, on peut ramener tout test unilatéral à un test à droite (en adaptant les notations).

5.3. Autres tests

On aborde ici trois tests non paramétriques (au sens où on ne teste pas le paramètre d'une distribution, mais une hypothèse sur des VA ou sur la distribution elle-même).

5.3.1. Indépendance de deux VA: le test du Khi-deux

5.3.2. Corrélation de deux VA: test de corrélation des rangs de Spearman

5.3.3. Normalité d'une VA: le test de Shapiro-Wilk

5.3.1. Test d'indépendance: le Khi-deux

On veut ici tester l'indépendance de deux variables qualitatives X et Y dans une population. Le test approprié est dit test du Khi-deux (ou χ^2) car il utilise la loi du même nom (notée χ^2).

On garde le principe général des tests étudiés dans les sections précédentes: tirage d'un échantillon, formulation de H_0 et H_1 et construction d'une statistique de test comparée à une valeur critique.

Mais le test du Khi-deux diffère des précédents car on ne teste plus le paramètre d'une loi de probabilité: les hypothèses sont formulées différemment, et la statistique construite différemment

Tableau de contingence

On présente dans un **tableau de contingence** les effectifs des variables X et Y observés dans l'échantillon:

X \ Y	y_1	…	y_j	…	y_q	Totaux
x_1	n_{11}	…	n_{1j}	…	n_{1q}	$n_{1\bullet}$
…	…		…		…	…
x_i	n_{i1}	…	n_{ij}	…	n_{iq}	$n_{i\bullet}$
…	…		…		…	…
x_p	n_{p1}	…	n_{pj}	…	n_{pq}	$n_{p\bullet}$
Totaux	$n_{\bullet 1}$	…	$n_{\bullet j}$	…	$n_{\bullet q}$	$n_{\bullet\bullet}$

Hypothèses et principe du test du χ^2

On cherche à tester l'hypothèse H_0: "les variables X et Y sont indépendantes" contre H_1: "les variables X et Y ne sont pas indépendantes".

Le principe du test consiste à comparer les effectifs du tableau de contingence (effectifs observés) à ceux (effectifs théoriques) que l'on obtiendrait en supposant l'indépendance de X et Y, autrement dit en supposant que H_0 est vraie.

Les effectifs théoriques c_{ij} sont calculés ainsi:

$$c_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n_{\bullet\bullet}}$$

Statistique du test du χ^2

Si $c_{ij} \geq 5 \ \forall\, i, j$ et si $n_{\bullet\bullet} \geq 50$, on peut calculer la statistique du test.

Sa formule est:

.

$$K = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\left(n_{ij} - c_{ij}\right)^2}{c_{ij}}$$

Si l'hypothèse H_0 est vérifiée, alors K est la réalisation d'une VA qui suit une loi du khi-deux à $(p$-1$)(q$-1) d.l., notée $\chi^2((p-1)(q-1))$

Conclusion du test du χ^2

On choisit un seuil de risque α, et on détermine (à l'aide d'une table ou d'un logiciel) la valeur critique C_α telle que:

$C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$ où F est la fonction de répartition de la loi $\chi^2_{(p-1)(q-1)}$

Rappel : la loi du χ^2 est asymétrique et n'est définie que pour des valeurs positive ou nulles (sa densité $f(x)$ est nulle $\forall x < 0$).

Si $K > C_\alpha$, le test est significatif: on rejette H_0 au seuil α, les variables *X* et *Y* sont liées.

Si $K \leq C_\alpha$, le test n'est pas significatif: on ne peut pas rejeter H_0, les variables *X* et *Y* sont indépendantes.

5.3.2. Tests de corrélation des rangs

On a rappelé au Chap. 1 la formule du coefficient de corrélation linéaire (dit "de Pearson") qui permet de mesurer la force relative d'une liaison (linéaire) entre deux variables statistiques.

Cette formule fait intervenir les *valeurs* des variables. Il existe des situations où elle se révèle inadaptée (ex: variables ordinales, variables discrètes, etc.)

On peut alors mesurer la force de l'association entre deux variables à l'aide d'un autre coefficient : le coefficient de corrélation **des rangs**, basé sur le classement relatif des variables. Il en existe plusieurs, le plus couramment utilisé étant celui de Spearmann.

Coefficient de corrélation de Spearman

Soient X et Y deux VA dont on échantillonne n observations. La formule du **coefficient de corrélation des rangs de Spearman** est:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}$$

où $\boldsymbol{d_i}$ **est l'écart de rang** entre les observations x_i et y_i.

Pour n ≥ 10, on peut utiliser ρ pour faire un **test de corrélation des rangs**. Les hypothèses de ce test sont:

H_0: rangs non corrélés, pas de relation monotone entre X et Y

H_1: les rangs sont corrélés, il existe une relation monotone (croissante ou décroissante) entre X et Y.

Test de corrélation des rangs de Spearman

Pour n ≥ 10, la statistique du test de corrélation des rangs est :

$$t = \rho\sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$$

Sous H_0, $t \sim St(n\text{-}2)$. La règle de décision du test est la suivante:

▪ Test bilatéral: si $|t| \geq C_\alpha$ avec $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha/2)$, on rejette H_0. Il existe une relation monotone (croissante ou décroissante) entre X et Y.

▪ Test unilatéral à droite: si $t \geq C_\alpha$ avec $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$, on rejette H_0. Il existe une relation croissante entre X et Y (association positive).

▪ Test unilatéral à gauche: si $t \leq -C_\alpha$ avec $C_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$, on rejette H_0. Il existe une relation décroissante entre X et Y (association négative).

<u>NB:</u> si n < 10, il faut recourir à une table spécifique non donnée dans le cadre de ce cours.

Ecart de rangs: illustration

L'écart de rang d_i est simplement de la différence entre le rang de X et celui de Y. Cette notion est assez intuitive, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Soit X une variable mesurant le temps (quatre années consécutives, par exemple) et Y une variable mesurant le CA annuel d'une entreprise (en K euros).

X (année)	Y (CA)	rang de Y	d_i
1	32	2	-1 (=1-2)
2	51	4	-2 (=2-4)
3	42	3	0 (=3-3)
4	12	1	3 (=4-1)

Test de corrélation des rangs: exemple (1)

Le tableau ci-dessous reporte **10 valeurs** de deux variables X et Y.

X	Y
106	7
86	0
100	27
101	50
99	28
103	29
97	20
113	12
112	6
110	17

On veut tester si les rangs de ces variables sont corrélés. Pour cela, il faut d'abord classer X par ordre croissant, puis reporter le rang de Y et calculer les d_i.

Test de corrélation des rangs: exemple (2)

Classement de X par ordre croissant, rang de Y et calcul des d_i :

X	rang de X	Y	rang de Y	d_i
86	1	0	1	0
97	2	20	6	−4
99	3	28	8	−5
100	4	27	7	−3
101	5	50	10	−5
103	6	29	9	−3
106	7	7	3	4
110	8	17	5	3
112	9	6	2	7
113	10	12	4	6

La somme des d_i^2 est 194. En appliquant la formule donnée plus haut, on trouve ρ = -0,1758 (en arrondissant à 4 chiffres après la virgule).

Test de corrélation des rangs: exemple (3)

Comme n = 10, on peut faire le test en utilisant la statistique de Student dont la valeur est ici t = -0,505.

Pour un test bilatéral au seuil de 5% , la loi St(8) donne C_α = 2,306. Comme $|t|$=0,505 < C_α = 2,306, on ne peut pas rejeter H_0. On conclut à l'absence de relation monotone entre X et Y.

Pour un test unilatéral (à gauche, ici) au seuil de 5% , la loi St(8) donne C_α = 1,86. Comme t = -0,505 > -C_α = -1,86, on ne peut pas rejeter H_0. On conclut à l'absence de relation monotone décroissante entre X et Y (pas d'association négative).

5.3.3. Test de normalité de Shapiro-Wilk

On veut ici tester si une VA suit une loi normale dans une population donnée. Ce test est utile pour de petits échantillons (de taille $n \leq 50$).

Soit X une VA. La statistique du test se calcule en cinq étapes:

1. On range les n observations de l'échantillon par ordre croissant:
$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n$$
2. On calcule la moyenne des n observations ainsi classées:
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
3. On calcule T, la somme des carrés des écarts à la moyenne:
$$T = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

Statistique du test de Shapiro-Wilk

4. On calcule les p différences suivantes:

$$d_1 = (x_n - x_1);\ d_2 = (x_{n-1} - x_2);\ \dots\ ;\ d_i = (x_{n-i+1} - x_i);\ \dots$$

avec $p = n/2$ si n pair et $p = (n-1)/2$ si n impair.

5. On calcule enfin w, la statistique du test, définie par:

$$\boxed{w = \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} a_j d_j\right)^2}{T}}$$

(Les coefficients a_j sont donnés dans une table statistique dédiée)

Résolution du test de Shapiro-Wilk

On pose les hypothèses du test:

H_0: "X est une VA normale" (ou encore "X suit une loi $\boldsymbol{N}(m,\sigma)$")
H_1: "X n'est pas une VA normale"

Le test se résout en comparant la statistique w à une valeur critique (ou "valeur limite") w^* , lue dans la table des valeurs critiques du test pour une taille d'échantillon n et un risque de 1ère espèce α.

<u>Règle de décision:</u>

Si $w > w^*$, on conserve H_0 et on conclut que X est une VA normale
Si $w \leq w^*$, on rejette H_0 et on conclut que X n'est pas une VA normale