

TD 3: Stats

Exercice 1

$$X \sim \mathcal{N}(m = ?, \sigma = \frac{2,6\%}{\sqrt{16}}) = \mathcal{N}(m, 0,0065)$$

$$1) P(X > m + 0,008)$$

$$P(Z > \frac{m + 0,008 - m}{\frac{2,6\%}{\sqrt{16}}})$$

$$P(Z > 1,231) = 1 - P(Z \leq 1,231) = 0,1093$$

Formule Rappel:

$$P(Z > a) = 1 - N(a)$$

$$P(Z < a) = N(a)$$

$$P(Z > -a) = N(a)$$

$$P(Z < -a) = 1 - N(a)$$

$$2) \text{ On cherche } P(X_{16} \leq m - 0,01)$$

$$\Rightarrow P(Z \leq \frac{m - 0,01 - m}{0,0065})$$

$$\Rightarrow P(Z \leq \frac{-0,01}{0,0065})$$

$$= P(Z \leq -1,54)$$

$$= 1 - P(Z > 1,54) \Rightarrow 0,6618$$

$$3) \text{ On cherche } p(m - 0,012 \leq X \leq m + 0,012). \text{ On pose } Z = \frac{X - m}{0,0065}$$

$$P(m - 0,012 \leq X \leq m + 0,012) = P\left(\frac{m - m - 0,012}{0,0065} \leq \frac{X - m}{0,0065} \leq \frac{m - m + 0,012}{0,0065}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P(-1,846 \leq Z \leq 1,846) \\
&= P(Z \leq 1,846) - P(Z \leq -1,846) \\
&= P(Z \leq 1,846) - [1 - P(Z \leq 1,846)] \\
&= P(Z \leq 1,846) - 1 + P(Z \leq 1,846) \\
&= 2P(Z \leq 1,846) - 1 = [2 \times 0,967 - 1] = 0,066
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{On cherche } P(\bar{X} < m - 0,012) \cup (\bar{X} > m + 0,012) \\
&= 1 - [P(\bar{X} > m + 0,012) + P(\bar{X} < m - 0,012)] \\
&= 1 - [P(Z < \frac{0,012}{0,065}) + P(Z < \frac{0,012}{0,065})] \\
&= 1 - [P(Z < 1,846) + P(Z < 1,846)] \\
&= 1 - [2P(Z < 1,846) - 1] \\
&= 1 - [2 \times 0,967 - 1] = 1 - 0,934 = 0,066
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) &P(\bar{X} > m + 0,008) \downarrow \\
&P(\bar{X} < m - 0,01) \downarrow \\
&P(\bar{X} < m - 0,012) \cup (\bar{X} > m + 0,012) \downarrow
\end{aligned}$$

Exercice 2.

$$1) \text{ Soit } X \sim \mathcal{N}(\mu, 3000)$$

$$\text{On sait que } n=36 \text{ alors } X \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{3000}{\sqrt{36}}) \Rightarrow \mathcal{N}(\mu, 500)$$

$$\text{Donc } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\text{On cherche } P(\bar{X} - 1500 \leq \mu \leq \bar{X} + 1500)$$

$$\Rightarrow \bar{X} - 1500 \leq \mu \leq \bar{X} + 1500$$

$$\Rightarrow -1500 \leq \mu - \bar{X} \leq 1500$$

$$\Rightarrow \frac{1500}{500} \geq \frac{\bar{X} - \mu}{500} \geq \frac{1500}{500}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 3 \gg z \gg -3 \\
&\Rightarrow P(-3 \leq z \leq 3) \\
&\Rightarrow P(z \leq 3) - P(z \leq -3) \\
&\Rightarrow P(z \leq 3) - [1 - P(z \leq 3)] \\
&\Rightarrow 2P(z \leq 3) - 1 \\
&= 2 \times 0,9987 - 1 = 0,9973.
\end{aligned}$$

$\bar{X}$ = moyenne dans l'échantillon
 μ = "vraie moyenne" (population)

2) $a = 1500$
 "niveau de confiance" 99% (99,73%)

Exercice 3

1) $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'actionnaire} \\ 0 & \text{si pas} \end{cases}$

Approximation de la loi d'une population

$$f_n = \frac{\sum X}{n} \quad f_n \sim \mathcal{U}\left(p, \sqrt{\frac{qp}{n}}\right)$$

Approximation du nombre d'actionnaires

$$\sum X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$\sum X_i \sim \mathcal{U}(np, \sqrt{np(1-p)})$$

f_n la proportion d'actionnaire $n = 130$
 $p = 0,2$

On a d'après le cours

$$f_n \sim \mathcal{U}\left(0,2, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$\sim \mathcal{U}(0,2; 0,035)$$

$$P(f_n > 0,15) = P\left(Z > \frac{0,15 - 0,2}{0,033}\right)$$

$$\text{avec } Z = \frac{f_n - 0,2}{0,035}$$

$$\Rightarrow P(Z > -1,43)$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq -1,43)$$

$$\Rightarrow 1 - [1 - P(Z \leq 1,43)]$$

$$\Rightarrow P(Z < 1,43) \text{ lecture table}$$

$$= 0,923$$

$$2) P(0,18 \leq f_n \leq 0,22)$$

$$= P(f_n \leq 0,22) - P(f_n \leq 0,18)$$

$$= P\left(\frac{f_n - 0,2}{0,035} \leq \frac{0,22 - 0,2}{0,035}\right) - P\left(\frac{f_n - 0,2}{0,035} \leq \frac{0,18 - 0,2}{0,035}\right)$$

$$= P(Z < 0,57) - P(Z \leq -0,57)$$

$$\Rightarrow P(Z < 0,57) - [1 - P(Z \leq 0,57)]$$

$$= 2 P(Z < 0,57) - 1$$

$$= 2 \cdot 0,7157 - 1 = 0,4314$$

$$3) P(f_n > 0,15) \uparrow$$

$$P(0,18 \leq f_n \leq 0,22) \uparrow$$

Exercice 4

$$1) \text{ Couvrez les } 30\% \\ P(f_n > 0,28)$$

f_n = proportion de électeurs qui soutient le candidat.
 $f_n \sim \text{urc}(0,2, 0,023)$

$$P\left(\frac{f_n - 0,2}{0,023} > \frac{0,28 - 0,2}{0,023}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z > 3,48) \\
 &= 1 - P(Z < 3,48) \\
 &= 1 - 0,9999 \approx 0
 \end{aligned}$$

Exercice 4

1) $P(f_n > 0,28) \approx 0$ si $p = 0,2$

p = "vraie valeur" dans la population

2) Cette fois ci $p = 0,40$

On a donc $N(0,40; 0,028)$

On cherche $P(f_n \leq 0,28)$ avec

$$P\left(Z_n \leq \frac{0,28 - 0,40}{0,028}\right)$$

$$Z_n = \frac{f_n - 0,40}{0,028}$$

$$P(Z \leq -4,29)$$

$$= 1 - P(Z \leq 4,29) = 1 - 1 \approx 0$$

Population échantillon	p	
	$< 0,28$	$> 0,28$
$f_n < 0,28$	Estimation correcte	Erreur "faux négatif"
$f_n > 0,28$	Erreur "faux positif"	Estimation correcte